

カオス時系列データの予測のためのパラメータ最適化手法

伊 藤 憲 一

Optimization of the Parameters for Predicting Chaotic Time Series

Ken-ichi ITOH

Abstract

A new method is proposed for predicting chaotic time series based on a local approximation. In the local approximation, a time series is embedded in a state space using delay coordinates and a local predictor is constructed using the nearest neighbors of the current state. The embedding dimension and the number of the nearest neighbors are significant parameters affecting the prediction accuracy. The proposed method aims to select the optimal parameters of the embedding dimension and the nearest neighbor number so as to minimize the prediction error. The efficacy of the proposed method is demonstrated using chaotic time series generated by the Hénon map and the Ikeda map.

Keywords: chaos, time series, prediction, embedding dimension, nearest neighbor

1. まえがき

不規則に変動する時系列データがカオスの性質を有していれば、カオスの決定論的な特徴を生かした精度の良い短期予測が可能である。このような考え方に基づくカオス時系列データの予測手法の研究がこれまで活発に行われてきた[1]~[5]

カオス時系列データの予測を行う場合、まず1変数の時系列データから、埋込みの手法[6],[7]を用いて多次元空間上にアトラクタの軌道を再構成する。次に、このアトラクタの軌道を生成する力学モデルを推定する。この推定方法の1つに、局所近似法がある[1]~[3]。局所近似法は、アトラクタ上のある点の近傍点は短時間経過後もまだ近傍点であるという考え方を基に、ある点の将来の値をその近傍点の動きにより推定する方法であ

る。

局所近似法においては、埋込み次元や近傍点の数などのパラメータ値が予測精度に大きな影響を与えるため、これらのパラメータ値をどのように設定するかが重要である。埋込み次元については、アトラクタの再構成に必要な値を、観測データから正確に推定できるかどうかという問題がある。特にデータ数が少ない場合は推定が困難である[8],[9]。また、埋込み次元を推定できたとしても、埋込みとなる最小の次元が予測精度上最適である保証はない。一方、近傍点の数についても、最適値の設定は困難である。近傍点の数が少なすぎると個々の近傍点の動きに解が大きく依存するため、解の安定性がなくなる。近傍点の数が多すぎると予測点から離れた点まで近傍点として選択されるため、解は予測点の局所的な動きを反映せず、この結果予測誤差

が増加する。

本論文では、上記問題解決を図るため、局所近似法の主要なパラメータである埋込み次元と近傍点の数を最適化するための手法を提案する。さらに、Hénon map [10] および Ikeda map [11] から生成されるカオス時系列データを用いて予測精度に関する評価実験を行い、本提案手法の有効性を示す。

2. 局所近似法

カオス時系列データの予測手法である局所近似法について、その概要と主な問題点を述べる。

ある時系列データ x_1, x_2, \dots, x_K が、 v 次元空間上のカオス力学系から生成されたものとする。この1変数の時系列データから元の v 次元空間上のアトラクタの軌道を再構成するため、一定の時間遅れ τ を用いて m 次元空間上に次の m 次元ベクトル X_i を生成する。

$$X_i = (x_i, x_{i-\tau}, \dots, x_{i-(m-1)\tau}),$$

$$i = 1+(m-1)\tau, 2+(m-1)\tau, \dots, K-1, K \quad (1)$$

ここで、 $m \geq 2v + 1$ であればこの変換は埋込みになり、元の v 次元空間上のアトラクタの構造が m 次元空間上に保存されることが、Takens により証明されている [6]。その後 Sauer らにより、アトラクタのボックスカウント次元を D_0 とするとき、 $m > 2D_0$ であれば埋込みになることが示されている [7]。この m 次元空間上での X_i の動きを推定することにより予測を行う。

局所近似法においては、 X_i の近傍点は短時間経過後もまだ近傍点であるという考え方を基に、 X_i の将来の値をその近傍点の動きにより推定する。具体的な方法を以下に述べる。

時刻 t までの時系列データ $x_1 \sim x_t$ が観測されたとき、時間 p 経過後の値 x_{t+p} を予測する問題を考える。まず観測値 $x_1 \sim x_t$ を用いて式 (1) によりアトラクタの再構成を行い、次にアトラクタ上で x_t に対応する点 X_i と時間 p 経過後の予測点 X_{t+p} の関係を、次式により近似

する。

$$X_{t+p} \cong F(X_i) \quad (2)$$

アトラクタ上の X_i の時間変化は、微小時間内であればその近傍点の時間変化にほぼ等しいと考え、アトラクタ上の点の中から X_i の近傍点 X_{T_h} ($h = 1, 2, \dots, n$) を選択し、これらの n 個の近傍点の平均的な推移を最小2乗法により求め、関数 F を推定する。

実際に x_{t+p} を予測するためには、 X_{t+p} の m 個の要素のうち1番目の要素 x_{t+p} を求めればよい。そこで、次の線形近似式により x_{t+p} を推定する。

$$x_{t+p} \cong f(X_i)$$

$$= a_0 + \sum_{k=1}^m a_k X_{i-(k-1)\tau} \quad (3)$$

係数 a_0, a_1, \dots, a_m は次のようにして求める。まず X_i を除くすべての X_j について、 X_i とのユークリッド距離 r を計算する。

$$r = \left(\sum_{k=0}^{m-1} (X_{i-k\tau} - X_{j-k\tau})^2 \right)^{1/2} \quad (4)$$

次に、 r の小さい順に n 個の点を X_i の近傍点 X_{T_h} ($h = 1, 2, \dots, n$) とし、次の最小2乗条件より係数 a_0, a_1, \dots, a_m を決定する。

$$\sum_{h=1}^n (x_{T_h+p} - f(X_{T_h}))^2 = \min \quad (5)$$

この係数の値を式(3)に代入することにより、 x_{t+p} を求めることができる。

最小2乗解を得るために必要な近傍点の数 n は、次式を満たす必要がある。

$$n \geq n_{\min} = m+1 \quad (6)$$

局所近似法においては、埋込み次元 m および近傍点の数 n が予測精度に大きな影響を与えるため、これらのパラメータ値をどのように設定するかが重要である。埋込み次元 m と近傍点の数 n の設定にあたっては、次のような問題点がある。

[埋込み次元 m の問題点]

① $m > 2D_0$ を満たす必要があるため、予測に先立って D_0 を推定する必要がある。

② 観測データから D_0 を正しく推定できるかどうか不明である。特にデータ数が少ない時は推定が困難である[8],[9]

③ 仮に D_0 を正しく推定できたとしても, $m > 2 D_0$ を満たす m をいくつに設定すべきかという問題がある。従来は $m > 2 D_0$ を満たす最小値 m_{\min} を使用してきたが, m_{\min} が予測精度上最適である保証はない。

[近傍点の数 n の問題点]

① n の最適値は, 観測データ数や埋込み次元などにも依存すると考えられ, 一般解を得るのは困難である。 n は, 最小2乗解を得るために必要な最小値 n_{\min} の2倍にするのが適当であるという報告[4]もあるが, どのような場合でも当てはまるとは限らない。

② n が少なすぎると個々の近傍点の動きに解が大きく依存するため, 解の安定性がなくなる。特に実データの場合は通常雑音が含まれるため, n が少ないと雑音の影響を受けやすい。

③ n が多すぎると予測点から離れた点まで近傍点として選択されるため, 解は予測点の局所的な動きを反映なくなり, 予測誤差が増加する。

3. 提案手法

ここでは, 局所近似法において予測精度上最適な埋込み次元と近傍点の数を求めるための手法を提案する。

本手法では, 観測データ数がある程度減少しても, 予測に適した埋込み次元と近傍点の数は大幅に変化しないと考え, 観測データのみを用いて予測を行い予測誤差を求め, 最適な埋込み次元と近傍点の数を推定する。すなわち, 観測データ L 個のうち先頭の L_f 個のデータをアトラクタ再構成用の学習データとして使い, 残りの $L - L_f$ 個のデータについて p ステップ先を局所近似法により順次予測する。この $L - L_f$ 個の予測値と観測値より相対誤差 E を求める。相対誤差 E の定義は4.2節に示す。埋込み次元と近傍点の数を変化さ

せながら予測を繰り返し, 相対誤差を求め, 予測に適した埋込み次元と近傍点の数を決定する。

具体的な方法は以下のとおりである。

① $m = 2, E_f =$ とする。

② $n = 2 n_{\min} = 2(m + 1)$ とする。

③ 埋込み次元を m , 近傍点の数を n に設定して予測を行い, 相対誤差 E を求める。

④ n の値を1つずつ減少させながら予測を繰り返し, 相対誤差 E が最初に増加する n の直前の値を n_d とする。

⑤ $n = 2 n_{\min} = 2(m + 1)$ とし, n の値を1つずつ増加させながら予測を繰り返し, 相対誤差 E が最初に増加する n の直前の値を n_u とする。

⑥ 近傍点の数 n が n_d のときの相対誤差と n_u のときの相対誤差を比較し, 相対誤差が小さい方の n を n_c , そのときの相対誤差を E_c とする。

⑦ E_c と E_f を比較する。

$E_c \geq E_f$ のとき, ⑧へ。

$E_c < E_f$ のとき, $m_f = m, n_f = n_c, E_f = E_c$ とした後, $m = m + 1$ とし, ②へ。

⑧ 埋込み次元を m_f , 近傍点の数を n_f に決定する。

4. 評価実験

提案手法の有効性を確認するために, 評価実験を行った。ここでは, 実験内容, 実験結果および考察について述べる。

4.1 予測対象データ

Hénon map[10]およびIkeda map[11]から生成されるカオス時系列データを用いた。

Hénon map は, 次の2次元写像である。

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= y_n + 1 - Ax_n^2, \\ y_{n+1} &= Bx_n \end{aligned} \quad (7)$$

式(7)において, パラメータ値 $A = 1.4, B = 0.3$, 初期値 $x_0 = 0.3, y_0 = 0.3$ としたときの x を時系列データとした。

Ikeda map は、次の2次元写像である。

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 1 + \mu(x_n \cos t - y_n \sin t), \\ y_{n+1} &= \mu(x_n \sin t + y_n \cos t) \end{aligned} \quad (8)$$

ここで $\mu = 0.4 - 6.0 / (1 + x_n^2 + y_n^2)$ である。

式(8)において、パラメータ値 $\mu = 0.7$ 、初期値 $x_0 = 0.3$ 、 $y_0 = 0.3$ としたときの x を時系列データとした。

4.2 予測値の評価指標

N ステップ分の観測値 $x(i = 1, 2, \dots, N)$ とその予測値 $y(i = 1, 2, \dots, N)$ が与えられたとき、次式の相対誤差 E を用いて予測精度の評価を行う[1]。

$$E = \frac{\sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i - x_i)^2}}{\sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}} \quad (9)$$

ここで、 $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$ である。

$E = 0$ のとき、予測は完全であることを示す。 $E = 1$ のとき、単に平均値を予測したにすぎないことを示す。

4.3 実験方法

実験では、提案手法の有効性を確認するため従来手法と提案手法による予測を行い、相対誤差を比較する。

予測においては、予測対象データの先頭 L 個のデータをアトラクタ再構成用の学習データとして使用し、引き続き N 個のデータについて p ステップ先を順次予測する。すなわち、過去の観測値 x_1, x_2, \dots, x_L および予測点の観測値 x_i をもとに p ステップ先の予測値 y_{i+p} を求め、観測値 x_{i+p} との誤差を求める。これを $i = L + 1$ から $i = L + N$ まで N 回繰り返し、この N 回分の予測値と観測値より相対誤差 E を求める。また、提案手法では L 個のうち先頭の L_f 個を、埋込み次元と近傍点の数の最適化のための学習データとして使用し、残りの $L - L_f$ 個を、埋込み次元と近傍点

の数の最適化のための予測データとして使用する。以上の関係を、図1に示す。

実験では、表1に示すパラメータ値を使用した。学習データ長 L は、100から10000まで変化させた。予測データ長 N は L と同一とした。予測ステップ数 $p = 1$ 、時間遅れ $\tau = 1$ とした。 L_f については、どの程度に設定するのが有効かを調べるために、 L の25%、50%、75%とした。

埋込み次元 m および近傍点の数 n については、次のように設定した。すなわち、提案手法では、3章の方法により求めた m_f と n_f を使用した。従来手法では、埋込み次元は $m > 2D_0$ を満たす最小値 m_{\min} を使用し、近傍点の数は $n = 2n_{\min} = 2(m_{\min} + 1)$ とした。Hénon map の $D_0 = 1.26$ 、Ikeda map の $D_0 = 1.32$ であり、両データとも、埋込み次元 $m = 3$ 、近傍点の数 $n = 8$ となる。また、局所近似法による予測精度の限界を示すため、埋込み次元 m と近傍点の数 n を変化させて予測を行い、相対誤差が最小となる限界値およびそのときの m, n の値を求めた。

表1 パラメータ値
Table 1 Values of parameters.

種類	記号	値
学習データ長	L	100 ~ 10000
予測データ長	N	L と同一
予測ステップ数	p	1
時間遅れ	τ	1
パラメータ選定用 学習データ長	L_f	L の25%、50%、 75%

4.4 実験結果と考察

(1) 提案手法と従来手法の比較

提案手法および従来手法による予測を行い、相対誤差を求めた。同時に、局所近似法において相対誤差が最小となる限界値についても求めた。

Hénon map における学習データ長と相対誤差の関係を図2に示す。ここで、提案手法は L_f が L の50%のケースを示す。また、図2

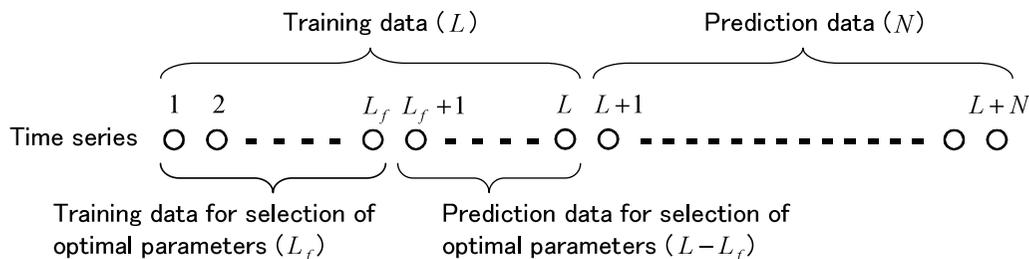


図1 実験方法

Fig. 1 Experimental method.

で実際に使用した埋込み次元と近傍点の数を図3, 図4に示す。図2より, 提案手法では限界値にかなり近い相対誤差となっている。一方, 従来手法の相対誤差は, 学習データ長が小さいときは限界値に近いが, 学習データ長が5000を超えると限界値から乖離する。すなわち, 提案手法は, 限界にかなり近い予測精度を実現でき, 学習データ長が大きい程従来手法に比べてより有効であるといえる。

従来手法の問題点の1つは埋込み次元の不足と考えられる。図3からわかるように, 従来手法では常に最小埋込み次元の3を用いているが, 限界値のケースでは学習データ長が大きくなると埋込み次元は4以上となる。提案手法では, 学習データ長が3000以上で埋込み次元が4以上となっており, 埋込み次元不足という従来手法の問題点のある程度解決している。また, 近傍点の数 n について, 図4からわかるように, 従来手法では常に $n = 2n_{\min} = 2(m_{\min} + 1)$ を用いているが, 限界値のケースでは学習データ長が大きい場合はこれよりも大きい値となっている。この点についても, 提案手法ではある程度対応している。

Ikeda map における学習データ長と相対誤差の関係を図5に示す。ここで, 提案手法は L_f が L の50%のケースを示す。また, 図5で実際に使用した埋込み次元と近傍点の数を図6, 図7に示す。図5より, 提案手法では限界値にかなり近い相対誤差となっている。一方, 従来手法では, 学習データ長が大きくなる程相対誤差は限界値から大きく乖離し,

その度合いは, Hénon map の場合よりはるかに大きい。その原因の1つは埋込み次元の不足と考えられる。図6からわかるように, Ikeda map では, 学習データ長が大きい場合に加えて小さい場合でも, 埋込み次元は最小埋込み次元の3では不足していることがわかる。提案手法では, 埋込み次元の不足という従来手法の問題点のある程度解決している。また, 近傍点の数 n について, 図7からわかるように, 常に $n = 2n_{\min} = 2(m_{\min} + 1)$ を用いるのが最適とはいえず, 特に学習データ長が大きい場合は近傍点の数をさらに増加させることが予測精度上望ましいといえる。この点についても, 提案手法ではある程度対応している。

(2) L_f の設定方法

Hénon map において L_f を L の25%, 50%, 75%と変化させたときの相対誤差を図8に示す。 L_f が L の25%, および75%の場合, 学習データ長が1000付近で相対誤差がやや増加する。 L_f が L の50%の場合の相対誤差は, 25%, 75%の場合に比べて全体的に小さいといえる。

Ikeda map において L_f を L の25%, 50%, 75%と変化させたときの相対誤差を図9に示す。 L_f が L の25%の場合, 学習データ長が5000以上で相対誤差が増加する。また, L_f が L の75%の場合, 学習データ長が700で相対誤差が増加する。 L_f が L の50%の場合の相対誤差は, 25%, 75%の場合に比べて全体的に小さい。

以上の結果から, Hénon map, Ikeda map

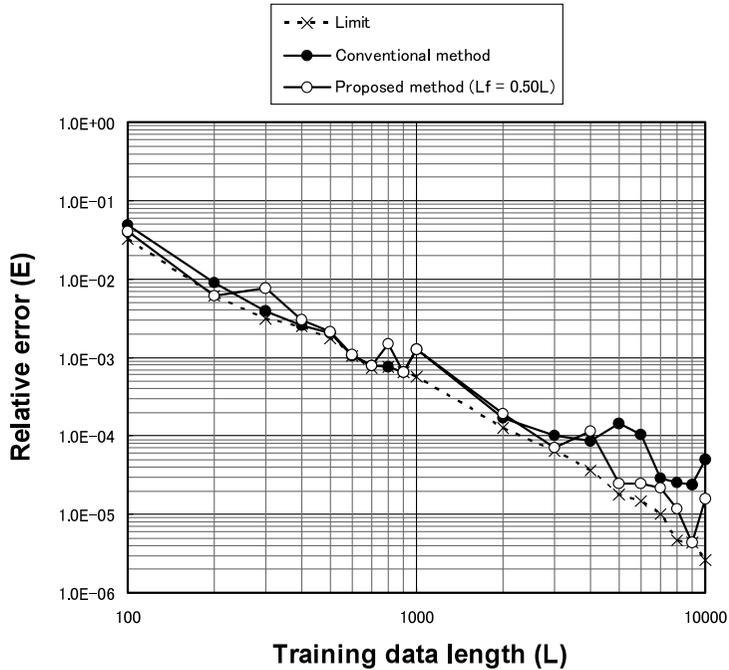


図2 Hénon map における学習データ長と相対誤差の関係
 Fig. 2 Relative error vs. training data length for the Hénon map.

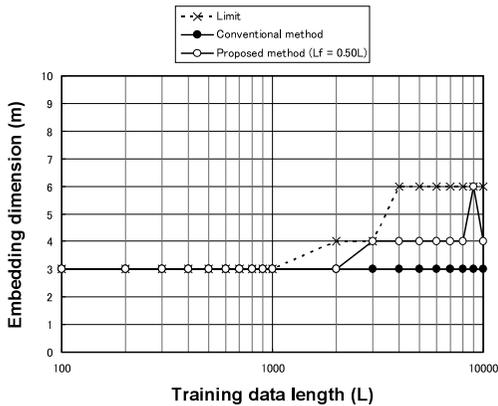


図3 Hénon map における学習データ長と埋込み次元の関係
 Fig. 3 Embedding dimension vs. training data length for the Hénon map.

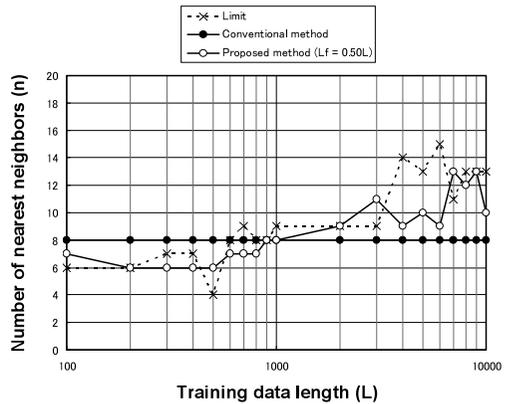


図4 Hénon map における学習データ長と近傍点の数の関係
 Fig. 4 Number of nearest neighbors vs. training data length for the Hénon map.

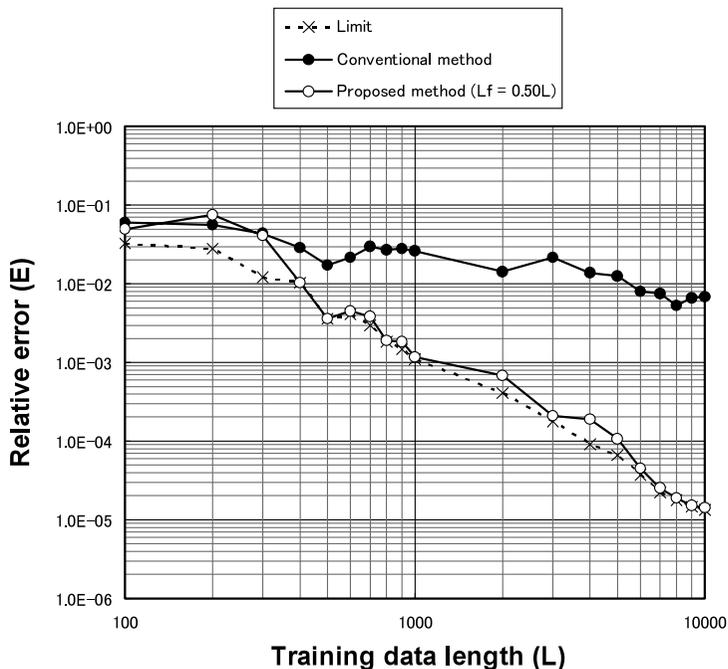


図5 Ikeda map における学習データ長と相対誤差の関係
 Fig. 5 Relative error vs. training data length for the Ikeda map.

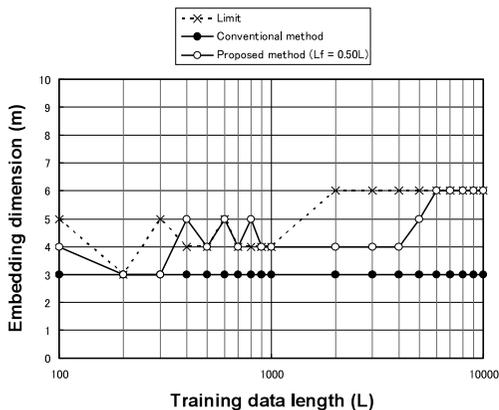


図6 Ikeda map における学習データ長と埋込み次元の関係
 Fig. 6 Embedding dimension vs. training data length for the Ikeda map.

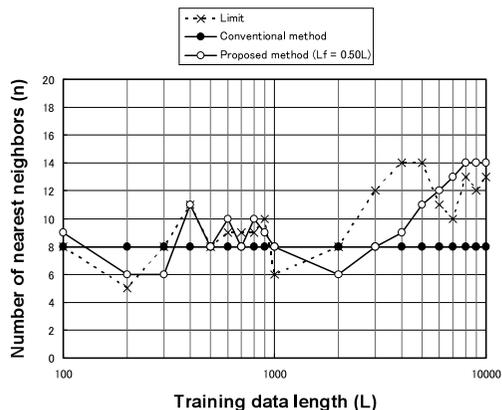


図7 Ikeda map における学習データ長と近傍点の数の関係
 Fig. 7 Number of nearest neighbors vs. training data length for the Ikeda map.

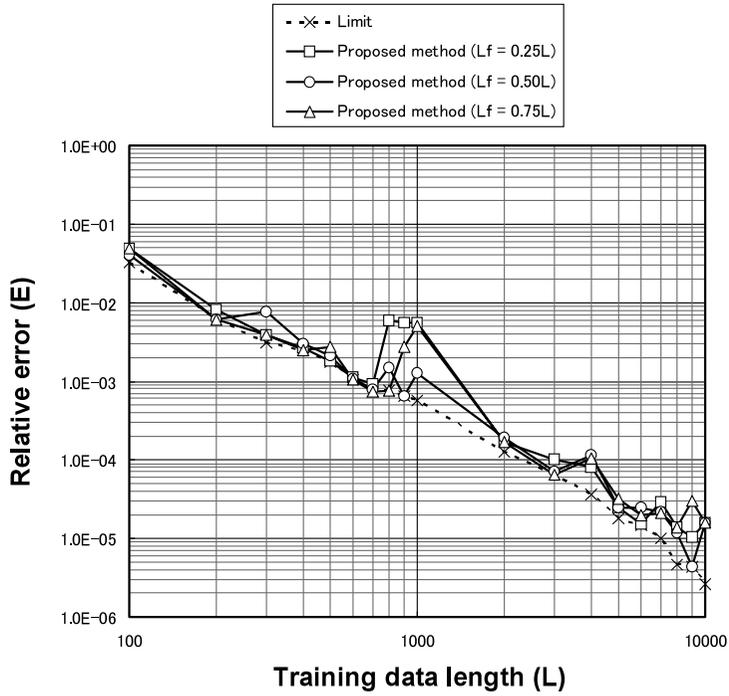


図8 Hénon map において L_f を変化させたときの相対誤差
 Fig. 8 Relative error for different values of L_f for the Hénon map.

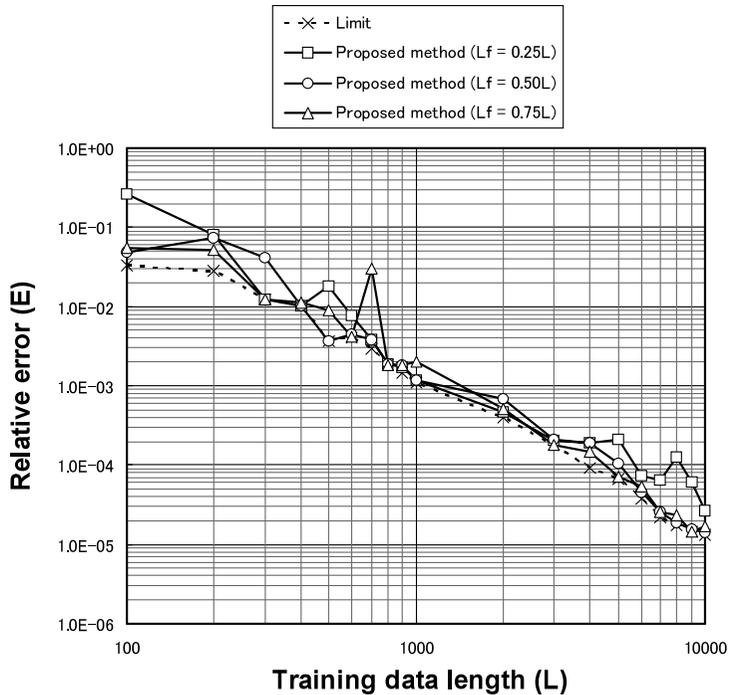


図9 Ikeda map において L_f を変化させたときの相対誤差
 Fig. 9 Relative error for different values of L_f for the Ikeda map.

ともに L_f は L の50%程度に設定するのが適当であるといえる。

(3) 実験結果のまとめ

① 提案手法を用いることにより，埋込み次元，近傍点の数の最適化を図ることができ，局所近似法の限界に近い予測精度を達成することができた。特に Ikeda map において，提案手法は従来手法に比べて予測精度を大幅に改善することができた。

② 提案手法において， L_f は L の50%程度に設定するのが適当である。

③ 従来手法では，予測に先立って埋込みに必要な次元を推定しなければならないが，提案手法ではこの推定は不要であり，最小埋込み次元が不明なデータにも適用可能である。

5. むすび

本論文では，カオス時系列データの代表的な予測手法である局所近似法において，埋込み次元と近傍点の数を最適化する手法を提案した。さらに，Hénon map および Ikeda map から生成されるカオス時系列データを用いて予測精度に関する評価実験を行い，提案手法は局所近似法の限界に近い予測精度を達成できることを示した。

今後，提案手法について，実データを用いた評価実験を行っていきたいと考える。

文 献

- [1] J. D. Farmer and J. J. Sidorowich, "Predicting chaotic time series," *Phys. Rev. Lett.*, vol.59, no.8, pp.845-848, Aug. 1987.
- [2] G. Sugihara and R. M. May, "Nonlinear forecasting as a way of distinguishing chaos from measurement error in time series," *Nature*, vol.344, no.19, pp.734-741, April 1990.
- [3] J. Jiménez, J. A. Moreno, and G. J. Ruggeri, "Forecasting on chaotic time series: A local optimal linear-reconstruction method," *Phys. Rev. A*, vol.45, no.6, pp.3553-3558, March 1992.
- [4] M. Casdagli, "Nonlinear prediction of chaotic time series," *Physica D*, vol.35, pp.335-356, 1989.
- [5] A. Lapedes and R. Farber, "Nonlinear signal processing using neural networks: Prediction and system modeling," *Los Alamos National Laboratory Report*, no.LA-UR-87-2662, 1987.
- [6] F. Takens, "Detecting strange attractors in turbulence," in *Dynamical Systems and Turbulence*, eds. D. A. Rand and L. S. Young, *Lecture Notes in Mathematics*, vol.898, pp.366-381, Springer, Berlin, 1981.
- [7] T. Sauer, J. A. Yorke, and M. Casdagli, "Embedology," *J. Stat. Phys.*, vol.65, no.3,4, pp.579-616, 1991.
- [8] J. Theiler, "Spurious dimension from correlation algorithms applied to limited time-series data," *Phys. Rev. A*, vol.34, no.3, pp.2427-2432, September 1986.
- [9] J. P. Eckmann and D. Ruelle, "Fundamental limitations for estimating dimensions and Lyapunov exponents in dynamical systems," *Physica D*, vol.56, pp.185-187, 1992.
- [10] M. Hénon, "A two-dimensional mapping with a strange attractor," *Commun. Math. Phys.*, vol.50, pp.69-77, 1976.
- [11] K. Ikeda, "Multiple-valued stationary state and its instability of the transmitted light by a ring cavity system," *Opt. Commun.*, vol.30, no.2, pp.257-261, 1979.